

Analyse Numérique

CORRIGÉ

Exercice 1.

Voir TD1 (exercice 4, question 1) ou bien le cours.

Exercice 2

Voir le cours

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. La matrice carrée A possède un déterminant $\det A = -1$ non nul, elle est donc inversible. D'après un théorème du cours, il existe une matrice de permutation P tq $PA = LU$.

2. Soit la matrice de transposition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $PA = I_3$. On peut trivialement écrire $PA = LU$ avec $L = I_3$ matrice triangulaire inférieure avec de 1 sur la diagonale et $U = I_3$ matrice triangulaire supérieure.

Exercice 4

On considère le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Le système s'écrit

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

En reportant les deux dernières équations dans la première, on trouve $2 = 1$. Ceci étant impossible, le système n'a pas de solution.

2. Calculons l'équation normale $A^T A = A^T b$ ici :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Le système précédent s'écrit

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme $x = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \alpha \right)^T$ où $\alpha \in \mathbf{R}$. La norme de la solution générale vaut $\|x\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \alpha^2}$. La solution \tilde{x} de norme minimale correspond à $\alpha = 0$, c'est-à-dire

$$\tilde{x} = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 0 \right)^T$$

4. D'après le théorème de décomposition en valeurs singulières, il existe des matrices 3×3 orthogonales U et V telles que $A = V \Sigma U^T$ où Σ est la matrice 3×3 diagonale définie à partir des valeurs singulières de A . Ces valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres λ de $A^T A$ telles que

$$\det(A^T A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

Les valeurs singulières (non nulles) de A sont donc $\sqrt{3}$, 1 et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice V étant orthogonale $A = V \Sigma U^T \Rightarrow A^T A = U \Sigma^2 U^T \Rightarrow A^T A U = U \Sigma^2$. La première colonne U_1 vérifie donc $A^T A U_1 = 3U_1$, c'est-à-dire

$$U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3x_1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

On prend $U_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^T$. De même, pour la deuxième colonne de U :

$A^T A U_1 = U_1$, et $U_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^T$. Enfin, $A^T A U_3 = 0$ et prenant

$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale. Par ailleurs $A = V \Sigma U^T \Rightarrow AU = V \Sigma$, d'où

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} AU_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T, \quad V_2 = AU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T.$$

Prenant $V_3 = V_2 \wedge V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}^T$, la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

est unitaire. Ainsi, une décomposition en valeurs singulière de A est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. L'inverse généralisé $A^\dagger = U \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^T$ s'écrit ici

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Alors

$$\tilde{x} = A^\dagger b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

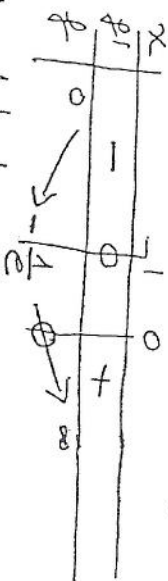
7. La valeur $\tilde{x} = A^\dagger b$ obtenue est la solution de norme minimum calculée à la question 3, ce qui est conforme à la théorie, cf cours.

Exercice 5.

Voir corrigé manuscrit ci-dessous.

Exercice 5

1) $f'(x) = (x+1)e^x$ d'où



f est continue et strictement croissante sur $[0, \infty[$, lim $f(x) = \infty$, c'est donc une bijection de $[0, \infty[$ sur lui-même.

2) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, \infty[$.

3) Par la formule de Taylor, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x) = f(x) + (x-x)f'(x) + \frac{1}{2}(x-x)^2 f''(c)$$

c.a.d.

$$\frac{x - f(x)}{f'(x)} = x - x + \frac{1}{2}(x-x)^2 \frac{f''(c)}{f'(x)}$$

ou encore

$$x - \frac{f(x) - a}{f'(x)} = N(x) = x + \frac{1}{2}(x-x)^2 \frac{f''(c)}{f'(x)}$$

Pour tout $x > 0$ et $c > 0$ on a $f'(x) > 0$ et $f''(c) = (c+2)e^c > 0$ donc $N(x) > x$.

4) $x_k - x_{k+1} = x_k - \left(x_k - \frac{f(x_k) - a}{f'(x_k)} \right) = \frac{f(x_k) - a}{f'(x_k)}$.

Puisque $k \geq 1$ on a $x_k = N(x_{k-1}) > x_{k-1}$ donc

$f(x_k) \geq f(x_{k-1}) = a$. Donc $x_k - x_{k+1} > 0$ et $(x_k)_{k \geq 1}$ est décroissante.

Elle est minorée par a donc converge. Soit l sa limite. On a

$$x_{k+1} = N(x_k) \text{ d'où } l = N(l) = l - \frac{f(l) - a}{f'(l)}$$

Ainsi $f(l) = a$. Comme $l > a > 0$ on a $l = a$.

5) - Puisque $x \leq x$ et $c \in [x, x]$ et que f'' est croissante on a, par P3,

$$0 \leq N(x) - x = \frac{1}{2}(x-x)^2 \frac{f''(c)}{f'(x)} \leq \frac{1}{2}(x-x)^2 \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2}(x-x)^2 \frac{x+2}{x+1} \leq \frac{1}{2}(x-x)^2 \frac{x+2}{x+1}.$$

On prouve $0 \leq x_k - a \leq (x_1 - a)^{2^{k-1}}$ par récurrence.

Pour $k=1$ il n'y a rien à démontrer. On a

$$0 \leq x_{k+1} - a = N(x_k) - a \leq \frac{(x+2)(x-x_k)^2}{2(x+1)} \leq \frac{(x+2)(x_1 - a)^{2^{k-1}}}{2(x+1)}$$

$$= \frac{x+2}{2(x+1)} (x_1 - a)^{2^k} \leq (x_1 - a)^{2^k}.$$